



Digitalna vezja UL, FRI



Vaja 5 Funkcijsko poln sistem, Zaprti razredi

Funkcijsko poln sistem (FPS) in ugotavljanje FPS

- Nabor operatorjev je funkcijsko poln, če z njim lahko izrazimo vsako funkcijo.

Nabor operatorjev disjunkcije, konjunkcije in negacije {OR, AND, NOT}, { $\vee$, $\cdot$, $\neg$ }, je funkcijsko poln sistem (operator $\neg$ predstavlja negacijo).

- Kako lahko pokažemo, da je nek nabor funkcij FPS?

1. Prevedba:

- Če lahko z nekim naborom funkcij izrazimo že znan FPS, npr. { $\vee$, $\cdot$, $\neg$ }, potem je tudi ta nabor FPS.
- S pretvorbo lahko hitro dokažemo, da je nek nabor FPS, težko pa z njo dokažemo, da nek nabor ni FPS, saj mogoče le mi ne najdemo pretvorbe na že znan FPS!

2. Z uporabo osnovnih zaprtih razredov (Postov teorem funkcijske polnosti)

Primer 1: $\{\downarrow\}$ prevedba na OR, AND, NOT

S pretvorbo na negacijo, konjunkcijo in disjunkcijo pokaži, da je Peircov operator $(\downarrow)$ FPS!

Negacija (NOT):

$$\bar{x} = \overline{x \vee x} = x \downarrow x$$

Disjunkcija (OR):

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\overline{x_1 \vee x_2}} = \overline{x_1 \downarrow x_2} = (x_1 \downarrow x_2) \downarrow (x_1 \downarrow x_2)$$

Konjunkcija (AND):

$$x_1 \cdot x_2 = \overline{\overline{x_1 \cdot x_2}} = \overline{\overline{x_1} \vee \overline{x_2}} = (x_1 \downarrow x_1) \downarrow (x_2 \downarrow x_2)$$

S Peircovim operatorjem smo uspešno izrazili negacijo, konjunkcijo in disjunkcijo in tako pokazali, da je Peircov operator FPS.

Primer 2: $\{\rightarrow, 0\}$ prevedba na OR, AND, NOT

S pretvorbo na negacijo, konjunkcijo in disjunkcijo pokaži, da je nabor implikacije ($\rightarrow$) in konstante 0FPS!

Negacija (NOT):

$$\bar{x} = \bar{x} \vee 0 = x \rightarrow 0$$

Disjunkcija (OR):

$$x_1 \vee x_2 = \overline{\bar{x}_1} \vee x_2 = \bar{x}_1 \rightarrow x_2 = (x_1 \rightarrow 0) \rightarrow x_2$$

Konjunkcija (AND):

$$x_1 \cdot x_2 = \overline{\overline{x_1 \cdot x_2}} = \overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2} = (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \rightarrow 0 = (x_1 \rightarrow \bar{x}_2) \rightarrow 0 = (x_1 \rightarrow (x_2 \rightarrow 0)) \rightarrow 0$$

Z implikacijo in konstanto 0 smo uspešno izrazili negacijo, konjunkcijo in disjunkcijo in tako pokazali, da je nabor $\{\rightarrow, 0\}$ FPS.

Osnovni zaprti razredi in preverjanje FPS s pripadnostjo osnovnim zaprtim razredom

□ Osnovni **zaprti razredi**:

- T_0 - razred preklopnih funkcij, ki ohranjajo ničlo
- T_1 - razred preklopnih funkcij, ki ohranjajo enico
- S – razred sebidualnih funkcij
- L – razred linearnih funkcij
- M – razred monotonih funkcij

□ **Funkcijska polnost nabora** preklopnih funkcij - preverjamo jo s **pripadnostjo osnovnim zaprtim razredom** (Postov teorem funkcijske polnosti).

- Nabor **je POLN**, če **odpira** vse osnovne razrede.
- Nabor odpira osnovni razred, če **vsaj ena funkcija NE** pripada temu razredu.

Primer 3: Ali je $\{ \rightarrow, 1 \}$ FPS?

	T_0	T_1	S	L	M
$\rightarrow$	$\notin$	$\in$			
1	$\notin$	$\in$			

Z uporabo osnovnih zaprtih razredov preverite, ali je nabor $\{ \rightarrow, 1 \}$ FPS!

$$f(x_1, x_2) = x_1 \rightarrow x_2 = \overline{x_1} \vee x_2$$

1) Razred T_0 : $f(0, 0, \dots, 0) = 0$

x_1	x_2	$x_1 \rightarrow x_2$	1	$f(x_1, x_2)$
0	0	1	1	$f(0,0)$
0	1	1	1	$f(0,1)$
1	0	0	1	$f(1,0)$
1	1	1	1	$f(1,1)$

$$\rightarrow: f(0,0) = \overline{0} \vee 0 = 1$$

$$1: 1 \neq 0$$

$$\rightarrow \notin T_0$$

$$1 \notin T_1$$

2) Razred T_1 : $f(1, 1, \dots, 1) = 1$

$$\rightarrow: f(1,1) = \overline{1} \vee 1 = 1$$

$$1: 1 = 1$$

$$\rightarrow \in T_0$$

$$1 \in T_1$$

	T_0	T_1	S	L	M
$\rightarrow$	$\notin$	$\in$	$\notin$		
I	$\notin$	$\in$	$\notin$		

Primer 3: Ali je $\{\rightarrow, 1\}$ FPS?

3) Razred S: $\bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$\rightarrow$: **1. Analitično:** $\bar{f}(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = f(x_1, x_2)$

$$\overline{\bar{x}_1 \rightarrow \bar{x}_2} = x_1 \rightarrow x_2$$

$$\overline{\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2} = \bar{x}_1 \vee x_2$$

$$\bar{x}_1 \cdot x_2 = \bar{x}_1 \vee x_2$$

$$= \bar{x}_1 \cdot (x_2 \vee \bar{x}_2) \vee x_2(x_1 \vee \bar{x}_1)$$

$$= \bar{x}_1 \cdot x_2 \vee \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \vee x_1 \cdot x_2$$

$$\vee^2(1) \neq \vee^2(0, 1, 3)$$

preverimo enakost -desno stran
dopolnimo do PDNO

$$\rightarrow \notin S$$

2. Tabelarično: $f(\vec{w}_i) \neq f(\vec{w}_{2^n-1-i})$

x_1	x_2	$x_1 \rightarrow x_2$	$f(x_1, x_2)$
0	0	1	$f(w_0)$
0	1	1	$f(w_1)$
1	0	0	$f(w_2)$
1	1	1	$f(w_3)$

$$f(w_0) = f(w_3)$$

$$f(0,0) = f(1,1), \text{ protiprimer}$$

1: $\bar{1} = 1,$
 $0 \neq 1$ (protislovje)

$$1 \notin S$$

	T_0	T_1	S	L	M
$\rightarrow$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	
I	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	

Primer 3: Ali je $\{\rightarrow, 1\}$ FPS?

4) Razred L: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in L; f(x_1, x_2, \dots, x_n) = a_0 \nabla a_1 \cdot x_1 \nabla a_2 \cdot x_2 \nabla \dots \nabla a_n \cdot x_n$

$\rightarrow$: **I. Analitično:**

- i. Predpostavimo, da funkcija $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ spada v razred L.

$$f(x_1, x_2)_L = x_1 \rightarrow x_2 = a_0 \nabla a_1 \cdot x_1 \nabla a_2 \cdot x_2$$

- ii. Določimo koeficiente $a_0, a_1, \dots, a_n$.

$$f(0,0)_L = a_0 \nabla a_1 \cdot 0 \nabla a_2 \cdot 0 = 1 \quad (a_0 = 1)$$

$$f(0,1)_L = 1 \nabla a_1 \cdot 0 \nabla a_2 \cdot 1 = 1 \nabla a_2 = 1 \quad (a_2 = 0)$$

$$f(1,0)_L = 1 \nabla a_1 \cdot 1 \nabla a_2 \cdot 0 = 1 \nabla a_1 = 0 \quad (a_1 = 1)$$

$$f(x_1, x_2)_L = 1 \nabla 1 \cdot x_1 \nabla 0 \cdot x_2 = 1 \nabla x_1$$

- iii. Preverimo ali se dobljena funkcija $a_0 \nabla a_1 \cdot x_1 \nabla a_2 \cdot x_2 \nabla \dots \nabla a_n \cdot x_n$ ujema s podano funkcijo $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

$$f(1,1) = \bar{1} \vee 1 = 1$$

$$f(1,1)_L = 1 \nabla x_1 = 1 \nabla 1 = 0$$

$$f(1,1) \neq f(1,1)_L$$

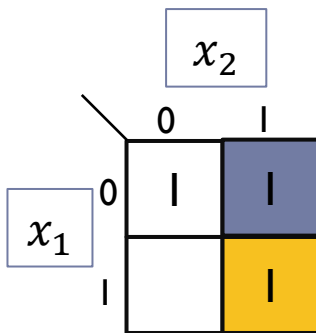
$\rightarrow \notin L$

	T_0	T_1	S	L	M
$\rightarrow$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	
I	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	

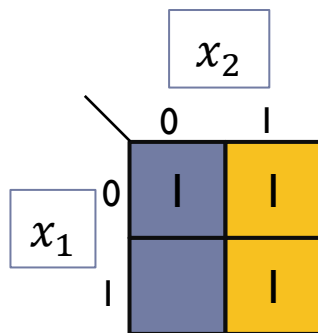
Primer 3: Ali je $\{\rightarrow, 1\}$ FPS?

$\rightarrow$: **2. s Karnaughjevim diagramom (pokritja):**

Primerjamo posamezna pokritja $\rightarrow$ veljati mora popolna enakost ali popolna različnost



$\overline{x_1} \cdot x_2 : x_1 \cdot x_2$ (popolnoma enaka)



$\overline{x_2} : x_2$ (niti popolnoma različna,
niti popolnoma enaka)

$\rightarrow \notin L$

Primer 3: Ali je $\{\rightarrow, 1\}$ FPS?

	T_0	T_1	S	L	M
$\rightarrow$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
1	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$

5) Razred M: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \in M; \forall i, j, \vec{w}_i < \vec{w}_j \rightarrow f(\vec{w}_i) \leq f(\vec{w}_j)$

Za w_i in w_j velja, da je $w_i < w_j$, če za vsako mesto k velja $w_{k,i} \leq w_{k,j}$ (na vseh istoležnjih bitih velja $\leq$).

Za preverjanje pripadnosti monotonosti **primerjamo sosedne vektorje** (razlikujeta se samo na enem mestu).

Primer: za $n=4$, $w_0 : (0,0,0,0)$

$w_4 : (0,1,0,0)$ $w_0 < w_4$

$\rightarrow$:

Sosedni vektorji:

$w_0 < w_1, w_0 < w_2$

$w_1 < w_3$

$w_2 < w_3$

	x_1	x_2	$x_1 \rightarrow x_2$	$f(x_1, x_2)$
w_0	0	0	1	$f(w_0)$
w_1	0	1	1	$f(w_1)$
w_2	1	0	0	$f(w_2)$
w_3	1	1	1	$f(w_3)$

V tabeli ugotovimo, da je $w_0 < w_2, f(w_0) \not\leq f(w_2)$

$(0,0) < (1,0); f(0,0) \not\leq f(1,0)$

$\rightarrow \notin M$

Primer 3: Ali je $\{\rightarrow, 1\}$ FPS?

	T_0	T_1	S	L	M
$\rightarrow$	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\notin$	$\notin$
I	$\notin$	$\in$	$\notin$	$\in$	$\in$

Ugotovili smo, da nabor $\{\rightarrow, 1\}$ **NI FPS**, saj razreda T_1 NE odpre nobena funkcija. Pri vseh ostalih razredih je vsaj ena funkcija, ki razredu ne pripada.

□ Kako bomo dopolnili nabor operatorjev, da bo funkcijsko poln?

Dodamo operator negacije ali konstanto 0, ker ena in druga odpirata razred T_1 , in tako dobimo funkcijsko poln sistem.

Primer 4: Ali je $v^3(0,3,4,6)$ FPS?

	T_0	T_1	S	L	M
f	☐	☐	☐		☐

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$$T_0: f(0,0,0) = 1 \Rightarrow f \notin T_0$$

$$S: \text{protiprimer: } f(0,1,0) = f(1,0,1) \Rightarrow f \notin S$$

$$T_1: f(1,1,1) = 0 \Rightarrow f \notin T_1$$

$$M: \text{protiprimer: } (1,1,0) < (1,1,1); f(1,1,0) \not\leq f(1,1,1) \Rightarrow f \notin M$$

	T_0	T_1	S	L	M
f	€	€	€	€	€

Primer 4: Ali je $v^3(0,3,4,6)$ FPS?

L (analitično):

x_1	x_2	x_3	$f(x_1, x_2, x_3)$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	0
1	1	0	1
1	1	1	0

$f(x_1, x_2, x_3)_L = a_0 \nabla a_1 \cdot x_1 \nabla a_2 \cdot x_2 \nabla a_3 \cdot x_3$		$f(x_1, x_2, x_3)_L$
$f(0,0,0)_L = a_0 \nabla a_1 \cdot 0 \nabla a_2 \cdot 0 \nabla a_3 \cdot 0 = 1$	$a_0 = 1$	1
$f(0,0,1)_L = 1 \nabla a_1 \cdot 0 \nabla a_2 \cdot 0 \nabla a_3 \cdot 1 = 0$	$1 \nabla a_3 = 0 \Rightarrow a_3 = 1$	0
$f(0,1,0)_L = 0 \nabla a_1 \cdot 0 \nabla a_2 \cdot 1 \nabla a_3 \cdot 0 = 0$	$1 \nabla a_2 = 0 \Rightarrow a_2 = 1$	0
		1
$f(1,0,0)_L = 1 \nabla a_1 \cdot 1 \nabla a_2 \cdot 0 \nabla a_3 \cdot 0 = 1$	$1 \nabla a_2 = 1 \Rightarrow a_1 = 0$	1
		0
		0
		1

$$f(x_1, x_2, x_3)_L = 1 \nabla 0 \cdot x_1 \nabla 1 \cdot x_2 \nabla 1 \cdot x_3 = 1 \nabla x_2 \nabla x_3$$

Preverimo preostale vhodne vektorje - vstavimo zapis funkcije $f(x_1, x_2, x_3)_L$ v tabelo.

$$f(1,1,0) = 1$$

$$f(1,1,0)_L = 1 \nabla 1 \nabla 0 = 0$$

$$f(1,1,0) \neq f(1,1,0)_L$$

$$f \notin L$$



	T_0	T_1	S	L	M
f	€	€	€	€	€

Primer 4: Ali je $v^3(0,3,4,6)$ FPS?

L (s Karnaughjevim diagramom - pokritja):

		x_2, x_3			
		00	01	11	10
x_1	0	1		1	
	1	1			1

$$x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 : x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{x_3} \text{ (popolnoma različna)}$$

		x_2, x_3			
		00	01	11	10
x_1	0	1		1	
	1	1			1

$$\overline{x_1} \cdot x_2 : x_1 \cdot x_2 \text{ (popolnoma različna)}$$

		x_2, x_3			
		00	01	11	10
x_1	0	1		1	
	1	1			1

$$\overline{x_2} : x_2 \text{ (niti popolnoma različna, niti popolnoma enaka)}$$

Naloga

1. S pretvorbo na negacijo, konjunkcijo in disjunkcijo pokaži, da je nabor operatorjev $\{\neg, \cdot, \vee\}$ funkcijsko poln sistem!

2. Podana je preklompna funkcija $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum(1, 6, 7, 9, 14, 15)$.
 - a) Preveri pripadnost zaprtim razredom T_0, T_1, S in M .
 - b) Pripadnost razredu L preveri analitično in s Karnaughjevim diagramom.
 - c) S Karnaughjevim diagramom določi MNO funkcije.
 - d) MNO realiziraj v Logisimu in na protoboardu.

