

Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

30. oktober 2025

Operacije z množicami

relacija pripadnosti ... $x \in A$

x *pripada* A .

podajanje množic

- ▶ z naštevanjem elementov $A = \{0, 1, 2\}$
- ▶ z neko izjavno formulo $A = \{x ; \varphi(x)\}$
Velja: $x \in A \Leftrightarrow \varphi(x)$

Zgledi množic

$$A = \{x ; x \neq x\} = \emptyset \quad \text{prazna množica}$$

$$B = \{x ; x = 0 \vee x = 1 \vee x = 2\} = \{0, 1, 2\}$$

$$C = \{x ; x^2 + 1 \geq 5\}$$

Enakost in vsebovanost

Množici A in B sta *enaki*,

$$A = B \iff \forall x (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

Množica A je *podmnožica* množice B ,

$$A \subseteq B \iff \forall x (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

relacija *inkluzije*

Množica A je *prava podmnožica* množice B ,

$$A \subset B \iff A \subseteq B \wedge A \neq B$$

relacija *stroge inkluzije*

Enakost in vsebovanost

Trditev

Za poljubne množice A , B in C velja

- ▶ $\emptyset \subseteq A$
- ▶ $A \subseteq A$
- ▶ Če $A \subseteq B$ in $B \subseteq C$, potem $A \subseteq C$.

Operacije z množicami

- ▶ *unija* $A \cup B = \{x ; x \in A \vee x \in B\}$
- ▶ *preseka* $A \cap B = \{x ; x \in A \wedge x \in B\}$
- ▶ *razlika* $A \setminus B = \{x ; x \in A \wedge x \notin B\}$
- ▶ *simetrična razlika* $A + B = \{x ; x \in A \vee x \in B\}$

Lastnosti operacij

- ▶ $A = B \iff A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- ▶ $A \subseteq B \Rightarrow A \cup C \subseteq B \cup C$
- ▶ $A \subseteq B \Rightarrow A \cap C \subseteq B \cap C$
- ▶ $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B$

Pravimo, da sta množici A in B *disjunktni*, če je $A \cap B = \emptyset$.

Univerzalna množica in komplement

Univerzalna množica, označimo jo z S , ustreza področju pogovora v predikatnem računu.

Vse obravnavane množice so vsebovane v univerzalni množici S .

Komplement množice A , označimo ga z A^c , definiramo kot

$$A^c = S \setminus A$$

Lastnosti komplementa

- ▶ $(A^c)^c = A$
- ▶ $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$
- ▶ $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- ▶ $A \setminus B = A \cap B^c$
- ▶ $A \subseteq B \Rightarrow B^c \subseteq A^c$
- ▶ $A \cap B = \emptyset \iff A \subseteq B^c \iff B \subseteq A^c$

Enakosti z množicami

Pokažimo, da velja

$$A \cup (A \cap B) = A$$

Potenčna množica

Potenčna množica množice A , $\mathcal{P}A$, je množica vseh podmnožic množice A .

$$\mathcal{P}A = \{B ; B \subseteq A\}$$

Tako $\emptyset$ kot A pripadata potenčni množici $\mathcal{P}A$.

$$\mathcal{P}\{1, 2, 3\}$$

$$\mathcal{P}\emptyset = \{\emptyset\} \quad \mathcal{P}\{\emptyset\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$$

Potenčna množica

Trditev

Če množica A vsebuje natanko n elementov in je n naravno število, potem $\mathcal{P}A$ vsebuje natanko 2^n elementov.

Trditev

Če $A \subseteq B$, potem $\mathcal{P}A \subseteq \mathcal{P}B$.

Družine množic

Naj bo

$$\mathcal{A} = \{A_1, A_2, A_3, \dots\} = \{A_i ; i \in \mathcal{I}\}$$

družina množic. Z $\mathcal{I}$ označimo indeksno množico.

Unija družine $\mathcal{A}$ je množica

$$\bigcup \mathcal{A} = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i = \{x ; \exists i (i \in \mathcal{I} \wedge x \in A_i)\}$$

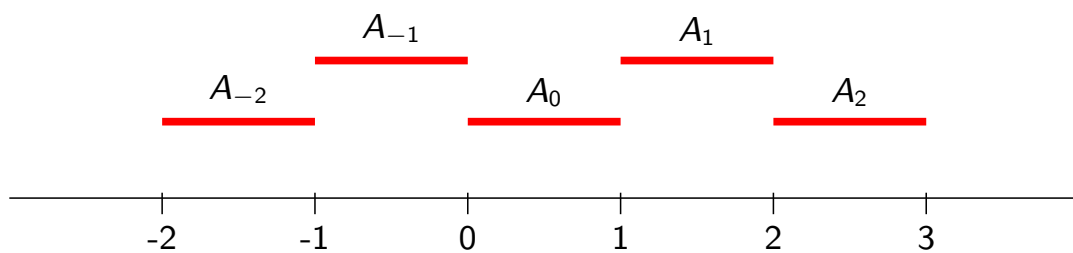
Presek družine $\mathcal{A}$ je množica

$$\bigcap \mathcal{A} = \bigcap_{i \in \mathcal{I}} A_i = \{x ; \forall i (i \in \mathcal{I} \Rightarrow x \in A_i)\}$$

Družina množic, zgled 1

$$A_i = [i, i + 1]$$

$$i \in \mathbb{Z}$$



Pokritje in razbitje

Družina množic $\mathcal{A} = \{A_i ; i \in \mathcal{I}\}$ je *pokritje* množice B , če je $B = \bigcup_{i \in \mathcal{I}} A_i$.

Družina množic $\mathcal{A} = \{A_i ; i \in \mathcal{I}\}$ je *razbitje* množice B , če je

- ▶ $\mathcal{A}$ pokritje množice B
- ▶ elementi $\mathcal{A}$ so neprazni in
- ▶ elementi $\mathcal{A}$ so paroma disjunktni .

Urejeni pari

Urejeni par s *prvo komponento (koordinato)* a in *drugo komponento (koordinato)* b označimo z (a, b) in definiramo kot

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

Trditev

(osnovna lastnost urejenih parov)

$$(a, b) = (c, d) \iff a = c \text{ in } b = d$$

Kartezični produkt

Kartezični produkt množic A in B je množica vseh urejenih parov

$$A \times B = \{(a, b) ; a \in A \wedge b \in B\}$$

Kartezični produkt

$(a_1, a_2, \dots, a_n)$ je urejena n -terica.

Definicijo kartezičnega produkta lahko razširimo na več faktorjev.

Lastnosti kartezičnega produkta

- ▶ $A \times B = \emptyset \iff A = \emptyset \vee B = \emptyset$
- ▶ $A \subseteq C \wedge B \subseteq D \implies A \times B \subseteq C \times D$
- ▶ $A \times B \subseteq C \times D \wedge A \times B \neq \emptyset \implies A \subseteq C \wedge B \subseteq D$
- ▶ A končna z m elementi in B končna z n elementi $\implies A \times B$ končna z $m \cdot n$ elementi.

Moč končnih množic

Naj bo A končna množica. Potem $|A|$ označuje *število elementov* ali *moč* množice A .

Naj bosta A in B končni množici. Pravimo, da sta A in B *enako močni*, $A \sim B$, če $|A| = |B|$.

Zgledi:

1. $|\emptyset| = 0$
2. $|\{0, 1\}| = 2$
3. $|\{\{0, 1\}\}| = 1$

Moč končnih množic

Trditev

Naj bodo A, B, C končne množice.

1. $|A \times B| = |A| \cdot |B|$
2. $|\{f; f: A \rightarrow B\}| = |B^A| = |B|^{|A|}$
3. $|\mathcal{P}A| = 2^{|A|}$
4. Če je $B \subseteq A$, potem je $|A \setminus B| = |A| - |B|$.
V splošnem je $|A \setminus B| = |A| - |A \cap B|$.
5. Če je $A \cap B = \emptyset$, potem je $|A \cup B| = |A| + |B|$.
V splošnem je $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.
6. $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$

Načelo vključitev in izključitev

Izrek

Naj bo A končna množica in $A_1, A_2, \dots, A_n \subseteq A$. Potem je

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n| &= \\ & |A_1| + |A_2| + \dots + |A_n| \\ & - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - \dots - |A_{n-1} \cap A_n| \\ & + \dots \\ & + (-1)^{n+1} |A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n| \\ & = \sum_{i=0}^n (-1)^i S_i, \end{aligned}$$

$$\text{kjer je } S_k = \sum_{\substack{\mathcal{J} \subseteq \{1, \dots, n\} \\ |\mathcal{J}|=k}} \left| \bigcap_{i \in \mathcal{J}} A_i \right|.$$

Nalogi

Naloga: Koliko je števil na celoštevilskem intervalu $[1 \dots 96]$, ki so deljiva s 6 in niso deljiva niti s 24 niti z 32?

Naloga: Zaposleni v nekem podjetju programirajo v treh jezikih: Java, C in Python. V vsakem jeziku programira tri petine programerjev, v C in Pythonu dve petini, v C-ju in Javi tri desetine ter v jezikih Java in Python ena petina. V vseh treh jezikih programira 10 programerjev.
Koliko programerjev je zaposlenih v podjetju?
Koliko jih programira v natanko dveh jezikih?