

Diskretne strukture UNI

Vaje, 12. teden

1. Dani sta permutaciji

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 8 & 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zapiši α in β kot produkt disjunktnih ciklov.
- (b) Zapiši permutacijo $\alpha * \beta * \alpha^{-1}$.
- (c) Poišči najmanjše število k , za katerega je $\alpha^k = \text{id}$.
- (d) Poišči najmanjše število k , za katerega je $\beta^k = \text{id}$.

2. Dana je permutacija

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 1 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

- (a) Določi π^{-1} .
- (b) Zapiši π kot produkt disjunktnih ciklov.
- (c) Zapiši π kot produkt samih transpozicij.
- (d) Določi π^2 in π^{2025} .

3. Za $n > 3$ definiramo permutacije $\pi_n \in S_n$ kot produkt ciklov

$$\pi_n = (1 \quad 2 \quad n)(1 \quad 3 \quad n) \cdots (1 \quad n-1 \quad n).$$

- (a) Zapiši permutacije π_4 , π_5 in π_6 .
- (b) Izračunaj $\pi_n(1)$, $\pi_n(n)$, $\pi_n^{-1}(1)$ in $\pi_n^{-1}(n)$.
- (c) Določi ciklično strukturo in parnost permutacije π_n .

4. Dane so permutacije

$$\eta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 1 & 8 & 9 & 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad \theta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 5 & 6 & 7 & 2 & 1 & 4 & 8 & 9 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{in}$$

$$\xi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (a) Zapiši permutacije η , θ in ξ kot produkte disjunktnih ciklov.
- (b) Kateri dve od permutacij η , θ in ξ sta konjugirani? (Permutaciji α in β sta *konjugirani*, če obstaja permutacija π , da je $\alpha = \pi * \beta * \pi^{-1}$.)
- (c) Za vsaki dve konjugirani permutaciji poišči ustrezno permutacijo π .

5. V S_{10} opazujemo permutacije π , za katere velja $\pi^{10} = \pi$.

- (a) Cikli katerih dolžin lahko nastopajo v zapisu permutacije π kot produkt disjunktnih ciklov?
- (b) Pokaži, da imajo vse permutacije π , za katere velja $\pi^{10} = \pi$, vsaj eno fiksno točko.
- (c) Poišči eno tako permutacijo π , ki ima najmanjše možno število fiksnih točk.