Diskretne strukture UNI
Vaje, 8. teden

1. Na množici $A = \{1, 2, \ldots, 20\}$ definiramo relacijo R:

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad y - x \text{ je praštevilo.}$$

   (a) Določi definicijsko območje in zalogo vrednosti relacije R.
   (b) Določi množico $\{y \in A \mid 10Ry\}$
   (c) Opiši relacijo R^+.

2. Na množici števil $\mathbb{N} \setminus \{0\}$ definiramo relacijo R:

$$aRb \quad \Leftrightarrow \quad \gcd(a, b) > 3.$$

   (a) Pokaži, da je $R \subseteq R^2$.
   (b) Ali je relacija R refleksivna, simetrična ali tranzitivna?
   (c) Ali je relacija R^2 refleksivna, simetrična ali tranzitivna?

3. Na množici naravnih števil definiramo relacijo R:

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad 5 \text{ deli } x + 4y.$$

   Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija in opiši vse ekvivalenčne razrede.

4. Naj bo $\mathbb{P}$ množica praštevil. Relacija R na $\mathbb{N}$ je podana s predpisom

$$aRb \Leftrightarrow \forall p \in \mathbb{P} : (p|a \Leftrightarrow p|b).$$

   (a) Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija.
   (b) Poišči [2] in [2021].
   (c) Ali obstaja ekvivalenčni razred z enim samim elementom?

5. Na $A = \{1, 2, \ldots, 100\}$ je podana relacija R s predpisom

$$aRb \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N}_0 : (2^k|a \Leftrightarrow 2^k|b).$$

   (a) Pokaži, da je R ekvivalenčna relacija.
   (b) Poišči [4].
   (c) Koliko je vseh ekvivalenčnih razredov?

6. V množici celih števil $\mathbb{Z}$ je dana relacija

$$xRy \quad \Leftrightarrow \quad 7 \text{ deli } x^2 - y^2.$$

   (a) Dokaži, da je relacija R ekvivalenčna.
   (b) Določi ekvivalenčni razred $[1]_R$ števila 1.
   (c) Določi moč faktorske množice $\mathbb{Z}/R$.

7. Imejmo množico izjavnih veznikov $N = \{0, 1, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \veebar, \downarrow, \uparrow\}$. Na $\mathcal{P}(N)$ definiramo relacijo $\leq$ tako: nabora $A, B \subseteq N$ sta v relaciji, $A \leq B$, natanko tedaj, ko lahko vsak izjavni izraz z vezniki iz A zapišemo v enakovredni obliki z vezniki iz B.

   (a) Utemelji, da je relacija $\leq$ refleksivna in tranzitivna.
   (b) Utemelji, da iz $A \subseteq B$ sledi $A \leq B$ (za vse $A, B \in \mathcal{P}(N)$).
   (c) Oglejmo si $A = \{0, \Leftrightarrow\}$ in $B = \{0, \neg, \Leftrightarrow\}$. Ali velja $A \leq B$? Ali velja $B \leq A$?
   (d) Je relacija $\leq$ simetrična?