

Diskretne strukture UNI

Vaje, 11. teden

1. Reši linearne diofantske enačbe

(a) $15x + 33y = 6$,

(b) $7x - 2y = 1$,

(c) $65x + 39y = 20$.

Poišči še tiste rešitve, pri katerih je $x \geq 0$ in $y \geq 0$.

2. Na tekmo bi radi z avtobusi pripeljali 1500 navijačev. Na voljo imamo avtobuse z 31 sedeži in avtobuse s 47 sedeži. Koliko avtobusov naj naročimo, če naj bodo v vseh avtobusih zasedeni vsi sedeži?

3. Določi najmanjše naravno število x , za katerega da $157x$ ostanek 10 pri deljenju s 24.

4. (a) Izračunaj $\varphi(1215)$ in $\varphi(1216)$.

(b) Določi $1024^{3241} \pmod{1215}$.

5. S pomočjo malega Fermatovega izreka pokaži, da

(a) 23 deli $a^{154} - 1$ za vse $a \in \mathbb{N}$, za katere je $\gcd(a, 23) = 1$.

(b) 17 deli $a^{80} - 1$ za vse $a \in \mathbb{N}$, za katere je $\gcd(a, 17) = 1$.

6. (a) Koliko je ostanek števila $((5^9)^{13})^{17}$ pri deljenju z 11?

(b) Koliko je ostanek števila $5^{9^{13}17}$ pri deljenju z 11?

7. Reši enačbe:

(a) $11x \equiv 242 \pmod{21}$,

(c) $((6^7)^8)^9 \equiv x \pmod{13}$,

(b) $5x \equiv 270 \pmod{25}$,

(d) $6^{7^{8^9}} \equiv x \pmod{13}$.

8. Dani sta permutaciji

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 2 & 5 & 8 & 1 & 7 & 4 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Zapiši α in β kot produkt disjunktnih ciklov.

(b) Zapiši permutacijo $\alpha * \beta * \alpha^{-1}$.

(c) Poišči najmanjše število k , za katerega je $\alpha^k = \text{id}$.

(d) Poišči najmanjše število k , za katerega je $\beta^k = \text{id}$.

9. Dana je permutacija

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 2 & 1 & 3 & 7 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Določi π^{-1} .

(b) Zapiši π kot produkt disjunktnih ciklov.

(c) Zapiši π kot produkt samih transpozicij.

(d) Določi π^2 in π^{2025} .

10. Za $n > 3$ definiramo permutacije $\pi_n \in S_n$ kot produkt ciklov

$$\pi_n = (1 \ 2 \ n)(1 \ 3 \ n) \cdots (1 \ n-1 \ n).$$

- (a) Zapiši permutacije π_4 , π_5 in π_6 .
- (b) Izračunaj $\pi_n(1)$, $\pi_n(n)$, $\pi_n^{-1}(1)$ in $\pi_n^{-1}(n)$.
- (c) Določi ciklično strukturo in parnost permutacije π_n .