

Diskretne strukture UNI

Vaje 9

1. Imejmo množico izjavnih veznikov $N = \{0, 1, \neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \forall, \exists, \downarrow, \uparrow\}$. Na $\mathcal{P}(N)$ definiramo relacijo $\leq$ tako: nabora $A, B \subseteq N$ sta v relaciji, $A \leq B$, natanko tedaj, ko lahko vsak izjavni izraz z vezniki iz A zapišemo v enakovredni obliki z vezniki iz B .

- (a) Utemelji, da je relacija $\leq$ refleksivna in tranzitivna.
- (b) Utemelji, da iz $A \subseteq B$ sledi $A \leq B$ (za vse $A, B \in \mathcal{P}(N)$).
- (c) Oglejmo si $A = \{0, \Leftrightarrow\}$ in $B = \{0, \neg, \Leftrightarrow\}$. Ali velja $A \leq B$? Ali velja $B \leq A$?
- (d) Je relacija $\leq$ simetrična? Je relacije $\leq$ antisimetrična?
- (e) Definirajmo novo relacijo $\simeq$ na $\mathcal{P}(N)$: $A \simeq B$, če $A \leq B \wedge B \leq A$. Utemelji, da je $\simeq$ ekvivalenčna relacija.
- (f) Relacija $\leq$ na $\mathcal{P}(N)$ nam sedaj določa relacijo $\lesssim$ na $\mathcal{P}(N)/\simeq$: $[A] \lesssim [B]$, če $A \leq B$. Premisli, da je ta opis smiseln, in utemelji, da je $\lesssim$ relacija delne urejenosti.

2. Naj bo B_n množica naravnih števil od 0 do $2^n - 1$. Ta števila predstavimo v dvojiškem zapisu; število $b \in B_n$ zapišemo kot $b = b_n \cdots b_2 b_1$, kjer so številke b_i enake 0 ali 1. Na B_n definiramo relacijo $\leq$ z

$$a \leq b \quad \Leftrightarrow \quad \forall i (a_i \leq b_i).$$

- (a) Ali velja: $2 \leq 3$, $5 \leq 8$, $4 \leq 5$?
- (b) Prepričaj se, da je $\leq$ relacija delne urejenosti.
- (c) Skiciraj Hassejev diagram te delne urejenosti v primeru $n = 3$.
- (d) Ali je $\leq$ relacija linearne urejenosti? Za kateri n oziroma zakaj ne? Kako to vidiš iz Hassejevega diagrama?

3. Funkcija $\sigma_0: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je dana s $\sigma_0(0) = 0$, za $n > 0$ pa z opisom

$$\sigma_0(n) = \text{število vseh deliteljev } n.$$

Ali je σ_0 injektivna? Ali je σ_0 surjektivna?

4. Funkcija $\sigma_1: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ je dana s $\sigma_1(0) = 0$, za $n > 0$ pa z opisom

$$\sigma_1(n) = \text{vsota vseh deliteljev } n.$$

- (a) Izračunaj $\sigma_1(n)$ za $n \in \{1, 2, \dots, 11\}$.
- (b) Poišči vse n , za katere je $\sigma_1(n) = 12$.
- (c) Ali obstaja n , da je $\sigma_1(n) = 2n$? Ali ima enačba $\sigma_1(n) = 2n$ neskončno rešitev?
- (d) Ali je σ_1 injektivna? Ali je σ_1 surjektivna?

5. Naj bo $\varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ Eulerjeva funkcija, tj.

$$\varphi(n) = \text{število naravnih števil med 1 in } n, \text{ ki so tuja } n.$$

- (a) Poišči $\varphi(1), \varphi(2), \varphi(3), \varphi(4), \varphi(5), \varphi(6)$.
- (b) Ali je φ injektivna? Surjektivna?
- (c) Dokaži, da za vse sode n velja $\varphi(n) \leq n/2$.
- (d) Ali za vse $n \geq 3$ velja $\varphi(\varphi(n)) < n/2$?

6. (a) Poišči injektivno funkcijo $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$.
 (b) Poišči surjektivno funkcijo $g: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Q}$.
 (c) Poišči injektivno funkcijo $h: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$.
 (d) Poišči surjektivno funkcijo $k: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}$.
7. Naj bo $I = (0, 1)$ odprt interval realnih števil med 0 in 1, $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, \dots\}$ pa množica strogo pozitivnih naravnih števil. Vsako število $x \in I$ lahko zapišemo v **neskončnem** decimalnem zapisu

$$0.a_1a_2a_3\dots$$

(pri čemer končno decimalno število dopolnimo z neskončnim zaporedjem ničel). Za vsako tako število x nato preštejemo, koliko ničel ima pred prvo neničelno števk v tem decimalnem zapisu, in, če jih je k , preberemo $f(x)$ kot k nadaljnjih števk decimalnega zapisa števila x :

$$x = \underbrace{0.00\dots 0}_{k \text{ ničel}} \underbrace{d_1d_2\dots d_k}_{\text{števke } f(x)} d_{k+1}\dots$$

Ta opis določa preslikavo $f: I \rightarrow \mathbb{N}^+$.

Nekaj primerov: $f(0.012) = 12$, $f(0.0034) = f(0.0034000\dots) = 340$, $f(\frac{\pi}{10}) = 3$.

- (a) Izračunaj $f(0.1234)$, $f\left(\frac{\sqrt{2}}{20}\right)$ in $f\left(\frac{\pi}{1000}\right)$.
 (b) Ali je preslikava f injektivna?
 (c) Ali je preslikava f surjektivna?