Osnove matematične analize
Vaje, 7. teden

1. * Določi definicijsko območje funkcije

$$f(x,y) = x^2 + \frac{y^2}{4}$$

in skiciraj nivojnice.

Rešitev: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, nivojnice so elipse s središčem v izhodišču in polosema $\sqrt{a}$, $2\sqrt{a}$.

2. * Skiciraj definicijska območja in nivojnice danih funkcij.

(a) $f(x,y) = \log(y - x^2 + 2)$,
(b) $f(x,y) = e^{y/x}$,
(c) $f(x,y) = \sqrt{x^{-1}\sin(y)}$.

Rešitve:

(a) $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \mid y > x^2 - 2\}$, nivojnice so parabole $y = x^2 + b$, $b \in (-2, \infty)$,

(b) $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \mid x \neq 0\}$, nivojnice so premice skozi izhodišče brez izhodišča (razen y-osi),

(c) $\mathcal{D}_f = \{(x,y) \mid x \neq 0, x \cdot \sin y > 0\}$, nivojnice so krivulje $\sin y = a^2 x$.

3. * Izračunaj odvode naslednjih funkcij:

(a) $f(x) = \sqrt{x}(2 - x^2)$,
(b) $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$,
(c) $f(x) = \log \frac{1+x}{1-x}$,
(d) $f(x) = \arcsin(\sqrt{1 - x^2})$.

Rešitve: (a) $\frac{1}{2\sqrt{x}}(2 - 5x^2)$, (b) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}$, (c) $\frac{2}{1-x^2}$, (d) $-\frac{x}{|x|} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

4. Poišči presečišče tangent na krivuljo $y = \frac{1}{1+x^2}$ v točkah $x = -1$ in $x = 1$. Pod kakšnim kotom se sekata?

Rešitev: Krivulji se sekata v točki $T(0,1)$ pod kotom $53.1°$.

5. * Poišči tisto normalo na krivuljo $y = x\log(x)$, ki je pravokotna na premico z enačbo $2x - 2y - 3 = 0$.

Rešitev: Enačba normale je $y = -x + 1$.

6. * Naj bo z enačbo $5x^2 - 8xy + 5y^2 = 1$ implicitno podana funkcija $y(x)$.

(a) Zapiši enačbi tangent na graf krivulje v obeh točkah, kjer je $x = 0$.
(b) Za katere vrednosti x je naklon tangente enak $k = \frac{1}{2}$?

Rešitvi: (a) $y = \frac{4}{5}x + \frac{1}{\sqrt{5}}$ in $y = \frac{4}{5}x - \frac{1}{\sqrt{5}}$, (b) $x = \pm\frac{1}{3}$.

7. Z uporabo linearne aproksimacije približno izračunaj naslednje vrednosti:

(a) $\sqrt[3]{28}$,
(b) $\sqrt[4]{260}$,
(c) $\sin(\frac{2\pi}{9})$,
(d) $\log 0.9$,
(e) $\log\sqrt{\sin(-0.05) + 0.95}$ (s funkcijo ene spremenljivke).

Rešitve: (a) 3.037 (3.036555...), (b) 4.016 (4.01553...), (c) 0.645 (0.6427876...), (d) -0.1 (-0.10536...), (e) -0.05 (-0.05267...).