

Diskretne strukture

Gašper Fijavž

Fakulteta za računalništvo in informatiko
Univerza v Ljubljani

6. oktober 2025

Izjave

Izjava je stavek, ki je bodisi resničen bodisi neresničen.
Vsak stavek ni izjava:

- ▶ *Zapri vrata!*
- ▶ *Ta stavek ni resničen.*

Kaj pa:

- ▶ *Zunaj sveti Luna.*

Izjave

Izjave delimo po *vsebini* na

- ▶ *resnične* (imajo vrednost 1) in
- ▶ *neresnične* (imajo vrednost 0)

ter *obliki* na

- ▶ *osnovne* (tudi *enostavne*) in
- ▶ *sestavljene*.

Izjave

Zgleda osnovnih izjav:

- ▶ *Zunaj sije Sonce.*
- ▶ *Peter sedi na vrtu.*

Zgledi sestavljenih izjav:

- ▶ *Če zunaj sije Sonce, Peter sedi na vrtu.*
- ▶ *Peter sedi na vrtu in zunaj sije Sonce.*
- ▶ *Ni res, da zunaj sije Sonce.*

Izjavni vezniki

Izjave sestavljamo s pomočjo *izjavnih veznikov* (tudi *izjavnih povezav*, *logičnih veznikov*).

Izjavni vezniki so:

- ▶ *enomestni* (npr. *ne*)
- ▶ *dvomestni* (npr. *in*, *ali*, če... *potem*..., *niti*... *niti*...)
- ▶ *tromestni*, ...

Izjavni vezniki

Resničnost sestavljene izjave je odvisna samo od resničnosti sestavnih delov. Zato izjavne veznike definiramo s pomočjo *resničnostnih tabel*.

- ▶ negacija $\neg$
- ▶ konjunkcija $\wedge$
- ▶ disjunkcija $\vee$
- ▶ implikacija $\Rightarrow$
- ▶ ekvivalenca $\Leftrightarrow$

Negacija

Negacija izjave A , $\neg A$, beremo "Ne A ".

$\neg A$ je resnična natanko tedaj, ko je A neresnična.

Definirana je z naslednjo pravilnostno tabelo:

A	$\neg A$
0	1
1	0

Negacija je *enomestni* izjavni veznik.

Konjunkcija

Konjunkcija izjav A in B , označimo jo z $A \wedge B$, in beremo " A in B ".

$A \wedge B$ je resnična n.t., ko sta **obe** izjavi A in B resnični.

Definirana je z naslednjo pravilnostno tabelo:

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjunkcija

Disjunkcija izjav A in B , označimo jo z $A \vee B$, in beremo " A ali B ".

$A \vee B$ je resnična n.t., ko je **vsaj ena** od izjav A ali B resnična.

Definirana je z naslednjo pravilnostno tabelo:

A	B	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Implikacija

Implikacija izjav A in B , označimo jo z $A \Rightarrow B$, in beremo
" $Iz A$ sledi B " " $\checkmark$ Če A potem B " " A implicira B "

Izjavi A pravimo *antecedens* implikacije, izjavi B pa *konsekvens* implikacije $A \Rightarrow B$.

$A \Rightarrow B$ je **neresnična** samo v primeru, ko je izjava A resnična in izjava B neresnična.

A	B	$A \Rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Definirana je z naslednjo pravilnostno tabelo:

Ekvivalenca

Ekvivalenca izjav A in B , označimo jo z $A \Leftrightarrow B$, in beremo

" A ekvivalentno B "

" A natanko tedaj, ko B "

" A , če in samo če B ".

$A \Leftrightarrow B$ je resnična n.t., ko imata **obe** izjavi A in B isto logično vrednost.

Definirana je z naslednjo pravilnostno tabelo:

A	B	$A \Leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Dogovor o opuščanju oklepajev

Če ni z oklepaji drugače naznačeno, potem:

1. Negacija veže močnejše kot konjunkcija,
konjunkcija veže močnejše kot disjunkcija,
disjunkcija veže močnejše kot implikacija in
implikacija veže močnejše kot ekvivalenca.
2. Istovrstni (dvomestni) vezniki vežejo od *leve proti desni*.

Izjavni izrazi

Osnovne izjave označujemo s črkami $p, q, r, \dots$.

Namesto o izjavah govorimo o *izjavnih izrazih*.

1. *Izjavni konstanti* 0 in 1, ki jima pravimo tudi *laž* in *resnica*, sta izjavna izraza.
2. *Izjavne spremenljivke* $p, q, r, \dots$ so izjavni izrazi.
3. Če so $A_1, A_2, \dots, A_n$ izjavni izrazi in je F n -mestni izjavni veznik, potem je $F(A_1, A_2, \dots, A_n)$ izjavni izraz.

Konstrukcijsko drevo in resničnostna tabela

Konstrukcijsko drevo opiše, kako izjavni izraz zgradimo iz bolj enostavnih izjavnih izrazov.

Resničnostna tabela izjavnega izraza za vsak *nabor* logičnih vrednosti izjavnih spremenljivk pove logično vrednost izjavnega izraza.

Tavtologija in protislovje

Izjavni izraz je *tavtologija*, če je resničen pri *vseh* naborih vrednosti izjavnih spremenljivk, ki v njem nastopajo.

Izjavni izraz je *protislovje*, če je *neresničen* pri *vseh* naborih vrednosti izjavnih spremenljivk, ki v njem nastopajo.

Izjavni izraz je *nevtralen*, če ni niti tautologija niti protislovje.

Enakovredni izjavni izrazi

Izjavna izraza A in B sta *enakovredna*, če imata pri vseh naborih vrednosti izjavnih spremenljivk enako vrednost.

V tem primeru pišemo $A \sim B$.

Enakovredni izjavni izrazi

Izrek

Izjavna izraza A in B sta enakovredna natanko tedaj, ko je izraz $A \Leftrightarrow B$ tautologija.

Izrek

Za enakovrednost izjavnih izrazov veljajo naslednje zveze:

1. $A \sim A$
2. Če $A \sim B$, potem $B \sim A$.
3. Če $A \sim B$ in $B \sim C$, potem $A \sim C$.

Zakoni izjavnega računa

Nekateri pari enakovrednih izjavnih izrazov imajo posebna imena. To so *zakoni izjavnega računa*.

Naloga

Poišči izjavni izraz s predpisano resničnostno tabelo:

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Disjunktivna normalna oblika

Disjunktivna normalna oblika (DNO) izjavnega izraza A je izjavni izraz A_{DNO} , za katerega velja:

- ▶ $A \sim A_{DNO}$
- ▶ A_{DNO} je disjunkcija osnovnih konjunkcij.

Osnovna konjunkcija je konjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij.

A_{DNO} lahko zgradimo tako, da za vsak nabor pravilnostne tabele, pri katerem je izraz A resničen, pripravimo eno osnovno konjunkcijo. V njej nastopajo v tem naboru resnične spremenljivke in negacije v tem naboru lažnih spremenljivk.

Naloga, znova

Poišči izjavni izraz s predpisano resničnostno tabelo:

p	q	r	A
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	0
1	1	1	1

Konjunktivna normalna oblika

Konjunktivna normalna oblika (KNO) izjavnega izraza A je izjavni izraz A_{KNO} , za katerega velja:

- ▶ $A \sim A_{KNO}$
- ▶ A_{KNO} je konjunkcija osnovnih disjunkcij.

Osnovna disjunkcija je disjunkcija izjavnih spremenljivk in/ali njihovih negacij.

A_{KNO} lahko zgradimo tako, da za vsak nabor pravilnostne tabele, pri katerem je izraz A neresničen, pripravimo eno osnovno disjunkcijo. V njej nastopajo v tem naboru lažne spremenljivke in negacije v tem naboru resničnih spremenljivk.

Kdaj KNO in DNO

Trditev

Vsak izjavni izraz ima DNO in

Vsak izjavni izraz ima KNO.

Posledica

Za vsak izjavni izraz A obstaja enakovreden izjavni izraz B , ki vsebuje samo veznike $\neg$, $\wedge$, $\vee$.

Polni nabori izjavnih veznikov

Družina izjavnih veznikov $\mathcal{N}$ je *poln nabor izjavnih veznikov*, če za vsak izjavni izraz A obstaja enakovreden izjavni izraz B , ki vsebuje samo veznike iz $\mathcal{N}$.

$\{\neg, \wedge, \vee\}$ je poln nabor izjavnih veznikov.

Polni nabori izjavnih veznikov

Nekaj drugih polnih naborov izjavnih veznikov:

$$\{\neg, \vee\}, \quad \{\neg, \wedge\}, \quad \{\neg, \Rightarrow\}, \quad \{0, \Rightarrow\}$$

Polni nabori izjavnih veznikov

Vprašanje:

Kako v praksi pokazati, da je nabor izjavnih veznikov $\mathcal{N}$ poln?

1. Izberemo znan poln nabor izjavnih veznikov $\mathcal{Z}$.
2. Vsak veznik iz znanega nabora $\mathcal{Z}$ izrazimo samo z uporabo veznikov iz $\mathcal{N}$.

Še trije izjavni vezniki

- ▶ ekskluzivna disjunkcija $\underline{\vee}$
- ▶ Shefferjev veznik $\uparrow$
- ▶ Pierce-Łukasiewiczov veznik $\downarrow$

Ekskluzivna disjunkcija

Ekskluzivna disjunkcija izjavnih izrazov A in B , označimo jo z $A \underline{\vee} B$, in beremo “ A ekskluzivni ali B ”.

$A \underline{\vee} B$ je resnična n.t., ko je **natanko eden** od izjavnih izrazov A in B resničen.

Definirana je z naslednjo pravilnostno tabelo:

A	B	$A \underline{\vee} B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Velja tudi $A \underline{\vee} B \sim \neg(A \Leftrightarrow B)$

Shefferjev veznik

Shefferjev veznik povezuje dva izraza A in B , kar označimo z $A \uparrow B$. Shefferjevemu vezniku pravimo tudi veznik NAND.

$A \uparrow B$ je **neresničen** n.t., ko sta oba izjavna izraza A in B resnična.

Definiran je z naslednjo pravilnostno tabelo:

A	B	$A \uparrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Velja tudi $A \uparrow B \sim \neg(A \wedge B)$

Pierce-Łukasiewiczjev veznik

Pierce-Łukasiewiczjev veznik povezuje dva izraza A in B , kar označimo z $A \downarrow B$.

Pravimo mu tudi veznik NOR.

$A \downarrow B$ je resničen n.t., ko sta oba izjavna izraza A in B **neresnična**.

Definiran je z naslednjo pravilnostno tabelo:

A	B	$A \downarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0

Velja tudi $A \downarrow B \sim \neg(A \vee B)$

Kam jih uvrstimo po prednosti

Ekskluzivna disjunkcija veže tako močno kot (navadna) disjunkcija.

$$A \vee B \underline{\vee} C \vee D$$

pomeni isto kot

$$((A \vee B) \underline{\vee} C) \vee D$$

Kam jih uvrstimo po prednosti

Shefferjev in Pierce-Łukasiewiczzev veznik vežeta tako močno kot konjunkcija.

$$A \uparrow B \wedge C \downarrow D \uparrow E$$

pomeni isto kot

$$(((A \uparrow B) \wedge C) \downarrow D) \uparrow E$$

Zakoni z novimi vezniki

ekskluzivna disjunkcija	$A \vee B \sim \neg(A \Leftrightarrow B)$ $A \vee B \sim B \vee A$ $(A \vee B) \vee C \sim A \vee (B \vee C)$
Shefferjev veznik	$A \uparrow B \sim \neg(A \wedge B)$ $A \uparrow B \sim B \uparrow A$
Pierceov veznik	$A \downarrow B \sim \neg(A \vee B)$ $A \downarrow B \sim B \downarrow A$

Sklepanje v izjavnem računu

Predpostavke:	1. <i>Ta žival ima krila ali pa ni ptič.</i>
	2. <i>Če je ta žival ptič, potem leže jajca.</i>
	3. <i>Ta žival nima kril.</i>
Zaključek:	4. <i>Torej ta žival ne leže jajc.</i>

Ali je ta sklep pravilen?

Formalizacija

<i>ta žival ima krila</i>	...	<i>k</i>
<i>ta žival je ptič</i>	...	<i>p</i>
<i>ta žival leže jajca</i>	...	<i>j</i>

1. $k \vee \neg p$
2. $p \Rightarrow j$
3. $\neg k$
4. $\neg j$

Pravilen sklep

Zaporedje izjavnih izrazov $A_1, A_2, \dots, A_n, B$ je *pravilen sklep* s *predpostavkami* $A_1, A_2, \dots, A_n$ in *zaključkom* B , če je zaključek B resničen pri vseh tistih naborih vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerih so resnične vse predpostavke.

Pišemo: $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$

in beremo:

Iz predpostavk $A_1, A_2, \dots, A_n$ logično sledi zaključek B .

Kako pokažemo, da sklep ni pravilen?

Nepravilen sklep

Kako pokažemo, da sklep ni pravilen?

Poiščemo *protiprimer*, tj. nabor vrednosti izjavnih spremenljivk, pri katerem so vse predpostavke resnične, zaključek pa ne.

Nepravilen sklep

Z izbiro nabora $k \sim 0$, $p \sim 0$ in $j \sim 1$ pridelamo:

$k \vee \neg p$	$\sim$	1	
$p \Rightarrow j$	$\sim$	1	
$\neg k$	$\sim$	1	in
$\neg j$	$\sim$	0	

Protiprimer je žival, ki

- ▶ nima kril,
- ▶ ni ptič in
- ▶ leže jajca.

Pravilen sklep

Izrek

$A_1, A_2, \dots, A_n \models B$ natanko tedaj, ko
je izraz $(A_1 \wedge A_2 \wedge \dots \wedge A_n) \Rightarrow B$ tautologija.

Zgled 0

Predpostavki:	1.	Če dežuje je oblačno.
	2.	Dežuje.
Zaključek:	3.	Oblachno je.

dežuje	...	d
oblačno je	...	o

Pravila sklepanja

$A, A \Rightarrow B \models B$	<i>modus ponens</i> (MP)
$A \Rightarrow B, \neg B \models \neg A$	<i>modus tollens</i> (MT)
$A \vee B, \neg B \models A$	<i>disjunktivni silogizem</i> (DS)
$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$	<i>hipotetični silogizem</i> (HS)
$A, B \models A \wedge B$	<i>združitev</i> (Zd)
$A \wedge B \models A$	<i>poenostavitev</i> (Po)
$A \models A \vee B$	<i>pridružitev</i> (Pr)

Pravilom sklepanja pravimo tudi *osnovni pravilni sklepi*.

Dokaz pravilnosti sklepa

Pravilnost sklepa $A_1, A_2, \dots, A_n \models B$ pokažemo tako, da sestavimo zaporedje izjavnih izrazov $C_1, C_2, \dots, C_m$, kjer je $C_m = B$ in za $i = 1, 2, \dots, m$ velja:

- (a) C_i je ena od predpostavk ali
- (b) C_i je tautologija ali
- (c) C_i je enakovreden enemu od predhodnih izrazov v zaporedju ali
- (d) C_i logično sledi iz predhodnih izrazov po enem od osnovnih pravilnih sklepov.

Zgled pravilnega sklepa

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q, p \vee r, q \Rightarrow s, r \Rightarrow t, \neg s$ sledi t ?

- | | | |
|----|-------------------|--------------|
| 1. | $p \Rightarrow q$ | predpostavka |
| 2. | $p \vee r$ | predpostavka |
| 3. | $q \Rightarrow s$ | predpostavka |
| 4. | $r \Rightarrow t$ | predpostavka |
| 5. | $\neg s$ | predpostavka |
| 6. | $p \Rightarrow s$ | HS(1,3) |
| 7. | $\neg p$ | MT(5,6) |
| 8. | r | DS(2,7) |
| 9. | t | MP(4,8) |

Zgled pravilnega sklepa, še en

Ali iz predpostavk $p \vee \neg q, \neg q \Rightarrow r \wedge s, \neg s \wedge r$ sledi $p \wedge r$?

$A, A \Rightarrow B \models B$	<i>modus ponens</i> (MP)
$A \Rightarrow B, \neg B \models \neg A$	<i>modus tollens</i> (MT)
$A \vee B, \neg B \models A$	<i>disjunktivni silogizem</i> (DS)
$A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \models A \Rightarrow C$	<i>hipotetični silogizem</i> (HS)
$A, B \models A \wedge B$	<i>združitev</i> (Zd)
$A \wedge B \models A$	<i>poenostavitev</i> (Po)
$A \models A \vee B$	<i>pridružitev</i> (Pr)

Zgled 3

- Predpostavke:
1. Šel bom v kino, zvečer pa bom naredil domačo nalogo.
 2. Če grem na tekmo in nato še v kino, zvečer ne bom mogel narediti domače naloge.
-
- Zaključek:
3. Ne morem iti na tekmo.

<i>grem na tekmo</i>	...	<i>t</i>
<i>grem v kino</i>	...	<i>k</i>
<i>naredim domačo nalogo</i>	...	<i>d</i>

Zgled 4

Ali iz predpostavk $p, \neg p$ sledi q ?

Zgled 5

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q \vee r$ in $\neg r$ logično sledi zaključek $p \Rightarrow q$.

Pogojni sklep

Pogojni sklep (PS) uporabljamo, kadar ima zaključek sklepa obliko implikacije.

Izrek

$A_1, A_2, \dots, A_k \models B \Rightarrow C$ natanko tedaj, ko
 $A_1, A_2, \dots, A_k, B \models C$.

Zgled

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q \vee r$ in $\neg r$ logično sledi zaključek $p \Rightarrow q$.

- | | | |
|------|--------------------------|-----------------|
| 1. | $p \Rightarrow q \vee r$ | predpostavka |
| 2. | $\neg r$ | predpostavka |
| 3.1. | p | predpostavka PS |
| 3.2. | $q \vee r$ | MP(1,3.1) |
| 3.3. | q | DS(3.2,2) |
| 3. | $p \Rightarrow q$ | PS(3.1,3.3) |

Napačen zgled

Pokaži, da iz predpostavk $p \Rightarrow q \vee r$ in $\neg r$ logično sledi zaključek q .

- | | | |
|------|--------------------------|-----------------|
| 1. | $p \Rightarrow q \vee r$ | predpostavka |
| 2. | $\neg r$ | predpostavka |
| 3.1. | p | predpostavka PS |
| 3.2. | $q \vee r$ | MP(1,3.1) |
| 3.3. | q | DS(3.2,2) |
| 3. | $p \Rightarrow q$ | PS(3.1,3.3) |
| 4. | q | DS(2,3.2) |

Sklep je **napačen**, saj je nabor vrednosti $p \sim q \sim r \sim 0$ protiprimer.

Po zaključku pogojnega sklepa **ne smemo uporabljati zamaknjenih vrstic**.

Sklep s protislovjem

Sklep s protislovjem (RA) lahko uporabljamo kadarkoli.

Izrek

$A_1, A_2, \dots, A_k \models B$ natanko tedaj, ko
 $A_1, A_2, \dots, A_k, \neg B \models 0$.

Zgled

Pokaži, da iz $p \Rightarrow \neg(q \Rightarrow r)$, $s \wedge q \Rightarrow r$ in s sledi $\neg p$.

Analiza primerov

Analizo primerov (AP) lahko uporabljamo, kadar ima ena od predpostavk obliko disjunkcije.

Izrek

$A_1, A_2, \dots, A_k, B_1 \vee B_2 \models C$ natanko tedaj, ko

$A_1, A_2, \dots, A_k, B_1 \models C$ *in*

$A_1, A_2, \dots, A_k, B_2 \models C$.